Jean-Marie Dufour
11 mars 2003

Université de Montréal
ECN 6238
Économétrie des séries chronologiques
Examen intra-semestriel

Aucune documentation permise
Calculatrice permise
Durée : 3 heures

10 points 1. (a) Définissez la notion d'**espace de probabilité**.

(b) Définissez ce qu'est un **processus stochastique** (à valeurs réelles) sur un espace de probabilité.

20 points 2. Soit le processus

$$X_t = \sum_{j=1}^{m} [A_j \cos(\nu_j t) + B_j \sin(\nu_j t)] \ , \ t \in \mathbb{Z} \ ,$$

où ν_1, ... , ν_m sont des constantes distinctes dans l'intervalle $[0, 2\pi)$ et A_j, B_j, $j = 1, \ldots, m$, sont des $v.a.'s$ dans L_2 , telles que

$$\begin{aligned} E(A_j) &= E(B_j) = 0 \ , \ E(A_j^2) = E(B_j^2) = \sigma_j^2 \ , \ j = 1, \ \ldots \ , \ n \ , \\ E(A_j A_k) &= E(B_j B_k) = 0, \ \text{pour } j \neq k \ , \\ E(A_j B_k) &= 0, \ \forall j, \ k \ . \end{aligned}$$

(a) Démontrez que ce processus est stationnaire d'ordre 2.

(b) Pour le cas où $m = 1$, démontrez que ce processus est déterministe.

40 points 3. Considérez le processus suivants, où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc $i.i.d.$ $N(0, 1)$:

$$X_t = 0.5 \ X_{t-1} + u_t - 0.25 \ u_{t-1}$$

Répondez aux questions suivantes :

(a) Ce processus est-il stationnaire ? Pourquoi ?

(b) Ce processus est-il inversible ? Pourquoi ?

(c) Calculez

i) $E(X_t)$;

ii) $\gamma(k)\,,\ k = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, 8\,;$

iii) $\rho(k)\,,\ k = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, 8\,.$

(d) Graphez $\rho(k)$.

(e) Quels sont les coefficients de u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3} et u_{t-4} dans la représentation moyenne mobile de X_t.

(f) Trouvez la fonction génératrice des autocovariances de X_t.

(g) Graphez la densité spectrale de X_t.

(h) Calculez les quatre premières autocorrélations partielles de X_t.

10 points 4. Soit $X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_T$ une série chronologique stationnaire du second ordre dont la fonction d'autocovariance $\gamma(k)$ est connue.

(a) Donnez la meilleure prévision linéaire (au sens de l'erreur quadratique moyenne) de X_t à partir de X_{t-1}.

(b) Si $E(X_t) = 10$, $\gamma(k) = 5(.25)^k$, $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$,et $X_3 = 2$, calculez la meilleure prévision que vous pouvez faire de X_4.

20 points 5. Soit $X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_T$ une série chronologique.

(a) Définissez :

i. les autocorrélations échantillonnales de cette série ;

ii. les autocorrélations partielles échantillonnales de cette série.

(b) Discutez les distributions asymptotiques de ces deux ensembles d'autocorrélations sous l'hypothèse où $X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_T$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

(c) On vous demande de tester l'hypothèse que $X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_T$ sont i.i.d. Décrivez une procédure exacte pour ce faire.