Jean-Marie Dufour
21 janvier 2003

TECHNIQUES DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES
EXERCICES
PROCESSUS ARIMA

1. Déterminez lesquels parmi les processus suivants sont stationnaires (causaux) et/ou inversibles. On suppose
$$(u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0,\ \sigma^2)\ .$$
   (a) $X_t + 0.2\,X_{t-1} - 0.48\,X_{t-2} = u_t$
   (b) $X_t + 1.9\,X_{t-1} + 0.88\,X_{t-2} = u_t + 0.2\,u_{t-1} + 0.7\,u_{t-2}$
   (c) $X_t + 0.6\,X_{t-2} = u_t + 1.2\,u_{t-1}$
   (d) $X_t + 1.8\,X_{t-1} + 0.81\,X_{t-2} = u_t$
   (e) $X_t + 1.6\,X_{t-1} = u_t - 0.4\,u_{t-1} + 0.04\,u_{t-2}$.
2. Soit le processus
$$(1 - B + 0.25\,B^2)X_t = (1 + B)u_t$$
   où $(u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$.
   (a) Ce processus est-il stationnaire causal ?
   (b) Si oui, trouvez
      i. les coefficients de la représentation moyenne mobile de X_t ;
      ii. la fonction d'autocovariance de X_t .

   [Voir Brockwell and Davis (1991, Section 3.3).]
3. Soit le processus MA(1)
$$X_t = u_t - \theta u_{t-1}\ ,\ |\theta| < 1\ ,\ t \in \mathbb{Z}$$
   où $(u_t : t \in \mathbf{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$. Dérivez la fonction d'autocorrélation partielle de X_t.
4. Soit le processus MA(1)
$$X_t = u_t - u_{t-1}\ ,\ t \in \mathbb{Z}$$
   où $(u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$. Dérivez la fonction d'autocorrélation partielle de X_t.

5. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire (non causal) qui satisfait l'équation

$$X_t = \varphi\, X_{t-1} + u_t \ , \ |\varphi| > 1 \ , \ (u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0,\ \sigma^2) \ .$$

Montrez que $X_t = (1 \,/\, \varphi)X_{t-1} + \widetilde{u}_t$, $(u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \widetilde{\sigma}^2)$ pour un bruit blanc choisi de façon appropriée. Déterminez $\widetilde{\sigma}^2$.

6. Montrez que l'équation de récurrence

$$X_t = \varphi\, X_{t-1} + u_t \, , \ t \geq 1 \ , \ (u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0,\ \sigma^2)$$

ne possède pas de solution stationnaire lorsque $|\varphi| = 1$.

7. Soit $(Y_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire du second ordre. Montrez que l'équation de récurrence

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = Y_t - \theta_1 Y_{t-1} - \cdots - \theta_q Y_{t-q}$$

possède une solution stationnaire si $\varphi(z) \equiv 1 - \varphi_1\, z - ... - \varphi_p\, z^p \neq 0$ pour $|z| = 1$. De plus, si $\varphi(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$, montrez que X_t est une fonction causale de Y_t.

8. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus ARMA stationnaire satisfaisant l'équation

$$\phi(B)\, X_t = \theta(B)\, u_t \, , \ (u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0,\ \sigma^2)$$

où $\phi(z)$ et $\theta(z)$ sont des polynômes de degré fini sans racine commune, et $\phi(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$. Si $\xi(z)$ est un polynôme, tel que $\xi(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$, montrez que l'équation

$$\xi(B)\, \phi(B)\ Y_t = \xi(B)\, \theta(B)\ u_t$$

possède une solution stationnaire unique $Y_t = X_t$.

9. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ le processus

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j} \ , \ (u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0,\ \sigma^2)$$

où $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Montrez que $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ où $\gamma(k)$ est la fonction d'autocovariance de X_t.

10. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire du second ordre et soit

$$Y_t = (1 - 0.4B)X_t = X_t - 0.4\ X_{t-1}$$

$$Z_t = (1 - 2.5B)X_t = X_t - 2.5\ X_{t-1}.$$

Montrez que Y_t et Z_t ont la même fonction d'autocorrélation.

11. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus ARMA stationnaire du second ordre, tel que $\phi(z) \neq 0$ pour $|z| \neq 1$, et dont la fonction d'autocovariance est $\gamma(k)$.

    (a) Montrez qu'il existe des constantes $c > 0$ et s, où $0 < s < 1$, telles que $|\gamma(k)| \leq C\, s^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$.

    (b) Déduisez que $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$.

12. Trouvez les coefficients ψ_j , $j = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ de la représentation

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, u_{t-j}$$

du processus ARMA(2, 1)

$$(1 - 0.5B - 0.4B^2)X_t = (1 + 0.25B)\, u_t\ ,\ u_t \sim BB(0, \sigma^2)\ .$$

13. Trouvez et graphez les dix premières autocovariances $\gamma(k)$, $k = 1,\ ...\ ,\ 10$, du processus

$$(1 - 0.5B)(1 - 0.4B)(1 - 0.1B)\, X_t = u_t\ ,\ u_t \sim BB(0,\ \sigma^2)\ ,\ t \in \mathbb{Z}\ .$$

14. Trouvez la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus

$$X_t = 2 + 1.3\, X_{t-1} - 0.4\, X_{t-2} + u_t - u_{t-1}\ ,\ u_t \sim BB(0,\ \sigma^2)\ ,\ t \in \mathbb{Z}\ .$$

Ce processus est-il causal ? Inversible ?

15. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus ARMA$(1, 1)$ satisfaisant l'équation

$$X_t - \varphi\, X_{t-1} = u_t + \theta u_{t-1}\ ,\ u_t \sim BB(0,\ \sigma^2)\ ,$$

où $|\varphi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

    (a) Déterminez les coefficients ψ_j de la représentation MA(∞) de X_t .

    (b) Montrez que la fonction d'autocorrélation de X_t est :

$$\begin{aligned} \rho(1) &= (1 + \varphi\theta)(\varphi + \theta)\ /\ (1 + \theta^2 + 2\varphi\theta)\,, \\ \rho(k) &= \varphi^{k-1}\rho(1)\ ,\ k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Références

BROCKWELL, P. J., AND R. A. DAVIS (1991) : *Time Series : Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York, second edn.