Jean-Marie Dufour
21 janvier 2003

TECHNIQUES DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES
EXERCICES
PROCESSUS STOCHASTIQUES 2

1. Discutez les conditions de convergence de la série

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$$

   où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\} \sim BB(0, \sigma^2)$. En particulier,

   (a) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre 2 ;

   (b) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre $r > 0$;

   (c) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge presque sûrement ;

   (d) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en probabilité.

2. Considérez le modèle $MA(1)$ suivant :

$$X_t = \overline{\mu} + u_t - \theta u_{t-1}\,,\ t \in \mathbb{Z}$$

   où $u_t \sim WN(0,\, \sigma^2)$ et $\sigma^2 > 0$.

   (a) Prouvez que la première autocorrélation de ce modèle ne peut être plus grande que 0.5 en valeur absolue.

   (b) Trouvez les valeurs des paramètres de ce modèle pour lesquelles la borne supérieure est atteinte.

3. Soit $\{x_t : t \in \mathbb{Z}\}$ un processus MA(q). Pour $q = 3,\, 4,\, 5,\, 6$, vérifiez si les inégalités suivantes sont correctes :

   (a) $|\rho(1)| \leq 0.75$;

   (b) $|\rho(2)| \leq 0.90$;

   (c) $|\rho(3)| \leq 0.90$;

(d) $|\rho(4)| \leq 0.90$;

(e) $|\rho(5)| \leq 0.90$;

(f) $|\rho(6)| \leq 0.90$.

4. Considérez les processus suivants, où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc $i.i.d.$ $N(0,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & X_t = 0.5\,X_{t-1} + u_t, \\
(2) & X_t = 10 - 0.75\,X_{t-1} + u_t, \\
(3) & X_t = 10 + 0.7\,X_{t-1} - 0.2\,X_{t-2} + u_t, \\
(4) & X_t = 10 + u_t - 0.75\,u_{t-1} + 0.125\,u_{t-2}, \\
(5) & X_t = 0.5\,X_{t-1} + u_t - 0.25\,u_{t-1}, \\
(6) & X_t = 0.5\,X_{t-1} + u_t - 0.5\,u_{t-1},
\end{array}
$$

Pour chacun de ces processus, répondez aux questions suivantes :

(a) Ce processus est-il stationnaire ? Pourquoi ?

(b) Ce processus est-il inversible ? Pourquoi ?

(c) Calculez

i) $E(X_t)$;

ii) $\gamma(k)$, $k = 1, 2, \ldots, 8$;

iii) $\rho(k)$, $k = 1, 2, \ldots, 8$.

(d) Graphez $\rho(k)$.

(e) Quels sont les coefficients de u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3} et u_{t-4} dans la représentation moyenne mobile de X_t.

(f) Trouvez la fonction génératrice des autocovariances de X_t.

(g) Graphez la densité spectrale de X_t.

(h) Calculez les quatre premières autocorrélations partielles de X_t.