Jean-Marie Dufour
21 janvier 2003

TECHNIQUES DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES
EXERCICES
PROCESSUS STOCHASTIQUES 1

1. (a) Définissez la notion d'**espace de probabilité**.
   (b) Définissez ce qu'est un **processus stochastique** (à valeurs réelles) sur un espace de probabilité.
2. Répondez par VRAI, FAUX ou INCERTAIN à chacune des assertions suivantes, et justifiez brièvement votre réponse. (Maximum : une page par assertion.)

   (1) Tout processus stationnaire au sens strict est dans L_2.

   (2) Tout processus stationnaire au sens strict est aussi stationnaire du second ordre.

   (3) Tout processus stationnaire d'ordre 3 est aussi stationnaire d'ordre 2.

   (4) Tout processus asymptotiquement stationnaire d'ordre 3 est aussi asymptotiquement stationnaire d'ordre 2.

   (5) Un bruit blanc est un processus stationnaire d'ordre 4.

3. Soit $\gamma(k)$ la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire du second ordre (sur les entiers). Démontrez que :

   (a) $\gamma(0) = Var(X_t)$ et $\gamma(k) = \gamma(-k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$;

   (b) $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$;

   (c) la fonction $\gamma(k)$ est semi-définie positive.

4. Soit le processus

$$X_t = \sum_{j=1}^{m}[A_j \cos(\nu_j t) + B_j \sin(\nu_j t)] \ , \ t \in \mathbb{Z} \ ,$$

   où $\nu_1, \ldots , \nu_m$ sont des constantes distinctes dans l'intervalle $[0, 2\pi)$ et $A_j, B_j, j = 1, \ldots , m$, sont des $v.a.'s$ dans L_2 , telles que

$$\begin{aligned} E(A_j) &= E(B_j) = 0 \ , \ E(A_j^2) = E(B_j^2) = \sigma_j^2 \ , \ j = 1, \ \ldots \ , \ n \ , \\ E(A_j A_k) &= E(B_j B_k) = 0, \ \text{pour } j \neq k \ , \\ E(A_j B_k) &= 0, \ \forall j, \ k \ . \end{aligned}$$

(a) Démontrez que ce processus est stationnaire d'ordre 2.

(b) Pour le cas où $m = 1$, démontrez que ce processus est déterministe.

[Suggestion : considérez une régression de X_t sur $\cos(\nu_1 t)$ et $\sin(\nu_1 t)$ basée sur deux observations.]