RAPPELS MATHÉMATIQUES
NOTIONS DE THÉORIE ASYMPTOTIQUE

Jean-Marie Dufour

January 14, 2002

1 NOTIONS DE THÉORIE ASYMPTOTIQUE DE CONVERGENCE

1.1 DÉFINITION : Soient $\{X_n = X_n(\omega) : n = 1,\ 2,\ ...\}$ une suite de v.a.'s réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et $X = X(\omega)$ une autre v.a. réelle définie sur le même espace.

(1) X_n *converge en probabilité* vers X $\left(X_n \xrightarrow{P} X\right)$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] = 0, \forall\varepsilon > 0\ .$$

(2) X_n *converge de façon presque sûre* vers X $\left(X_n \xrightarrow{p.s.} X\right)$ ssi

$$P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = X\right] = 1\ .$$

(3) X_n *converge complètement* vers X $\left(X_n \xrightarrow{c} X\right)$ ssi

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] < \infty\ , \forall\varepsilon > 0\ .$$

(4) Supposons que $E|X_n|^r < \infty$, $\forall n$, où $r > 0$. X_n *converge en moyenne d'ordre* r vers X $\left(X_n \xrightarrow{r} X\right)$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^r\right] = 0\ .$$

Dans ce cas, on dit aussi X_n *converge vers* X *dans* L_r. Si $r = 2$, on dit que X_n *converge vers* X *en moyenne quadratique* (*m.q.*).

(5) Soient $F_n(x)$ et $F(x)$ les fonctions de distribution de X_n et X respectivement. X_n *converge en loi* (ou *en distribution*) vers X $\left(X_n \overset{L}{\to} X\right)$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \text{ à tous les points de continuité de } F(x)\ .$$

1.2 PROPOSITION (Unicité de la limite en probabilité) : Soit $\{X_n : n = 1, 2, ...\}$ une suite de v.a.'s réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soient X et Y deux v.a.'s réelles définies sur le même espace de probabilité. Alors

$$X_n \overset{P}{\to} X \text{ et } X_n \overset{P}{\to} Y \Rightarrow P[X \neq Y] = 0\ .$$

2 RELATIONS ENTRE CONCEPTS DE CONVERGENCE

2.0 Soient $\{X_n\} \equiv \{X_n : n = 1, 2, ...\}$ une suite de v.a.'s réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une autre v.a. réelle définie sur le même espace.

2.1 $X_n \overset{p.s.}{\to} X \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{k\geq n} |X_k - X| \overset{P}{\to} 0$ lorsque $n \to \infty$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right] = 0,\ \forall\varepsilon > 0\ .$$

2.2 $X_n \overset{c}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{p.s.}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{P}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{L}{\to} X$.

2.3 $X_n \overset{r}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{s}{\to} X$ pour tout s tel que $0 < s \leq r \Rightarrow X_n \overset{P}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{L}{\to} X$.

Remarque : En général, les implications dans 2.2 et 2.3 ne peuvent être renversées.

2.4 $\Sigma_{n=1}^{\infty} E\left[|X_n - X|^r\right] < \infty$ pour un certain $r > 0 \Rightarrow X_n \overset{c}{\to} X$ et $X_n \overset{r}{\to} X$.

2.5 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone non décroissante pour $x \geq 0$, telle que $g(x) \geq 0$ et $g(x) = g(-x)$. Alors

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} E\left[g(X_n - X)\right] < \infty \Rightarrow X_n \overset{c}{\to} X\ .$$

2.6 $X_n \overset{P}{\to} X \Rightarrow$ il existe une sous-suite $\{X_{n_k} : k = 1, 2\ , ...\} \subseteq \{X_n\}$ telle que $X_{n_k} \underset{k\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} X$ et

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} P\left[|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{2^k}\right] < \infty.$$

2.7 $X_n \overset{P}{\to} X \Leftrightarrow$ chaque sous-suite $\{X_{n_k}\}$ de $\{X_n\}$ contient une sous-suite $\{X_{m_k}\} \subseteq \{X_{n_k}\}$ telle que $X_{m_k} \overset{p.s.}{\to} X$.

2.8 Soit $\{X_n\}$ une suite de v.a.'s non négatives telles que $X_n \leq X_{n+1},\ \forall n$, ou $X_n \geq X_{n+1},\ \forall n$. Alors

$$X_n \overset{P}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{p.s.}{\to} X\ .$$

2.9 DÉFINITION (Suite d'intégrales uniformément continues) : Les intégrales des v.a.'s $\{X_n : n = 1,\ 2,\ ...\}$ sont uniformément continues ssi

$$\sup_{n\geq 1} \int_A X_n dP \to 0 \text{ lorsque } P(A) \to 0\ .$$

2.10 DÉFINITION (Suite uniformément intégrable) : Soit $B_n = \{\omega \in \Omega : |X_n| \geq a\}$. La suite de v.a.'s $\{X_n : n = 1,\ 2,\ ...\}$ est uniformément intégrable ssi

$$\sup_{n\geq 1} \int_{B_n} X_n dP \to 0 \text{ lorsque } a \to \infty\ .$$

2.11 $X_n \xrightarrow{r} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ et au moins une des trois conditions suivantes s'applique :

(a) $E\left(|X_n|^r\right) \to E\left[|X|^r\right]$;

(b) la suite de v.a.'s $\{|X_n|^r : n = 1, 2, ...\}$ est uniformément intégrable;

(c) les intégrales des v.a.'s $\{|X_n|^r : n = 1,\ 2,\ ...\}$ ou celles de $\{|X_n - X|^r : n = 1,\ 2,\ ...\}$ sont uniformément continues.

2.12 Si $E|X_n|^r \leq c < \infty$, $\forall n$, pour $r > 0$, alors

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{r'} X \text{ pour tout } 0 < r' < r\ .$$

2.13 Si $|X_n| \leq Y$, $\forall n$, et $E\left(|Y|^r\right) < \infty$, alors

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X \text{ et } E\left(|X|^r\right) < \infty\ .$$

2.14 Si $|X_n| \leq c < \infty$, $\forall n$, alors

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X \text{ et } E\left(|X|^r\right) < \infty \text{ pour tout } r > 0\ .$$

2.15 Si les v.a.'s X_n sont indépendantes, alors

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{c} X\ .$$

2.16 Si $P[X = d] = 1$, alors

$$X_n \xrightarrow{P} d \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L} d.$$

2.17 (Critère de Cauchy)

a. Il existe une v.a. X telle que $X_n \overset{P}{\to} X$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{m,n\to\infty} P[|X_m - X_n| > \varepsilon] = 0, \forall \varepsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \{\sup_{k\geq 1} P[|X_{n+k} - X_n| > \varepsilon]\}, \forall \varepsilon > 0\,. \end{aligned}$$

b. Il existe une v.a. X telle que $X_n \overset{p.s.}{\to} X$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P[\sup_{k,\ell\geq n} |X_k - X_\ell| > \varepsilon] = 0, \forall \varepsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P[\sup_{k\geq 1} |X_{n+k} - X_n| > \varepsilon] = 0, \forall \varepsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow \sup_{k\geq 1} |X_{n+k} - X_n| \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0 \\ &\Leftrightarrow \sup_{k\geq 1} |X_{n+k} - X_n| \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} 0. \end{aligned}$$

c. Il existe une v.a. $X \in L_r$ telle que $X_n \overset{r}{\to} X$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{m,n\to\infty} E[|X_m - X_n|^r] = 0 \\ &\Leftrightarrow \sup_{k\geq 1} E|X_{n+k} - X_n|^r \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

2.18 Soit $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de constantes positives telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Alors

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} [P|X_n - X| > \varepsilon_n] < \infty \Leftrightarrow X_n \overset{p.s.}{\to} X.$$

2.19 $X_n \overset{p.s.}{\to} X \Leftrightarrow \exists$ une suite ε_n telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} [P|X_k - X| \geq \varepsilon_k, \text{ pour au moins un } k \geq n] = 0.$$

3 CONVERGENCE DE SUITES D'ESPÉRANCES ET DE FONCTIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

3.0 Soient $\{X_n : n = 1, 2, ...\}$ une suite de v.a.'s réelles, X une v.a. réelle et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(X)$ et $g(X_n)$, $n = 1, 2, ...$, sont des v.a.'s réelles.
3.1 (Théorème de Helly-Bray)
$X_n \overset{L}{\to} X \Rightarrow E[g(X_n)] \to E[g(X)]$ pour toute fonction bornée continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3.2 Si $g(x)$ est une fonction continue et $X_n \overset{L}{\to} X$, alors

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} E\,[|g(X_n)|] \geq E[|g(X)|]$;

b) $|g(x)|$ est uniformément intégrable en $F_n \Rightarrow E[g(X_n)] \to E[g(X)]$;

c) $E\left[|g(X_n)|\right] \to E[|g(X)|] < \infty \Leftrightarrow |g(x)|$ est uniformément intégrable en F_n .

Remarque : $|g|$ est uniformément intégrable en F_n ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists a(\varepsilon) \text{ et } b(\varepsilon) \text{ ne dépendant pas de } n \text{ tels que}$$

$$a \leq a(\varepsilon) \text{ et } b \geq b(\varepsilon) \Rightarrow \int |g(x)| d\ F_n(x) - \int_a^b |g(x)| d\ F_n(x) < \varepsilon, \forall n \text{ .}$$

3.3 Si $E\left[|X_n|^{r_0}\right] \leq c < \infty$, $\forall n$, pour $r_0 > 0$, alors
$X_n \xrightarrow{L} X \Rightarrow E\left[|X_n|^r\right] \to E\left[|X|^r\right] < \infty$ pour tout $0 < r < r_0$
et $E\left[X_n^k\right] \to E\left[X^k\right] \neq \pm\infty$ pour tout entier $0 < k < r_0$, $k \in \mathbb{N}$.

3.4 Si $E\left(X_n^k\right)$ existe et est fini pour tout k ($k = 1,\ 2,\ ...$) et n, alors

a) $X_n \xrightarrow{L} X$ et $E\left(X_n^k\right) \to \mu_k \neq \pm\infty \Rightarrow E(X^k) = \mu_k$;

b) $E\left(X_n^k\right) \to \mu_k \neq \pm\infty$, où la suite $\{\mu_k : k = 1,\ 2,\ ...\}$ définit une fonction de distribution unique $F(x)$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$, où X est une v.a. dont la fonction de distribution est $F(x)$.

3.5 Si $E|X_n|^r < \infty$, $\forall n$, pour $r > 0$, alors

$$X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow E|X_n|^r \to E|X|^r \text{ et } E|X|^r < \infty \Rightarrow E\left(X_n^k\right) \to E(X^k) \text{ pour } 0 < k < r \text{ .}$$

3.6 Si $E\left(X_n^2\right) < \infty$, $\forall n$, alors

$$X_n \xrightarrow{2} X \Rightarrow E\left(X_n^2\right) \to E(X^2) < \infty \text{ et } E(X_n) \to E(X) \neq \pm\infty \text{ .}$$

3.7 Si $E|X_n|^r < \infty$, $\forall n$, et $E|X|^r < \infty$, pour $r > 0$, alors

$$X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow E\left(X_n^k\right) \to E(X^k), \text{ pour tout entier } 0 < k \leq r \text{ .}$$

3.8 Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue partout, sauf possiblement dans un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$, et X une v.a. telle que $P[X \in A] = 0$. Alors

a) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$;

b) $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$;

c) $X_n \xrightarrow{L} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{L} g(X)$.

3.9 Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux suites de variables aléatoires. Alors

a) $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$;

b) $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y$;

c) $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(X, Y)$ pour toute fonction continue $g(x, y)$.

3.10 Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux suites de v.a.'s telles que $X_n \xrightarrow{L} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} c$, où X est une v.a. et c est une constante réelle ($-\infty < c < +\infty$). Alors

a) $X_n + Y_n \xrightarrow{L} X + c$;

b) $X_n Y_n \xrightarrow{L} X\ c$;

c) $X_n/Y_n \xrightarrow{L} X/c$ si $c \neq 0$;

d) $(X_n, Y_n) \xrightarrow{L} (X, c)$.

3.11 Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux suites de v.a.'s telles que $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$ et $Y_n \xrightarrow{L} Y$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

a) $X_n \xrightarrow{L} Y$;

b) $g(X_n) - g(Y_n) \xrightarrow{P} 0$;

c) $g(X_n) \xrightarrow{L} g(Y)$.

3.12 $X_n \xrightarrow{2} X \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} E(X_m X_n)$ existe et est fini peu importe la manière dont m et $n \to \infty$.
3.13 $X_n \xrightarrow{2} X$ et $Y_n \xrightarrow{2} Y \Rightarrow E(X_n+Y_n) \to E(X+Y)$ et $E(X_nY_n) \to E(X\ Y) \neq\geq \infty$.

4 SÉRIES ALÉATOIRES

Définitions
4.0 Soit $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ un processus stochastique à valeurs réelles et considérons la série $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$.
4.1 On dit $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge (dans un mode de convergence) ssi il existe une v.a. réelle Y telle que

$$\Sigma_{t=1}^{N} X_t \underset{N\to\infty}{\to} Y \text{ (dans le même mode de convergence) .}$$

Remarque : Mode de convergence : p.s., en probabilité ou en moyenne d'ordre r .

4.2 QUESTIONS : (1) Sous quelles conditions la série $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge-t-elle?
(2) Sous quelles conditions peut-on écrire

$$E\left(\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t\right) = \Sigma_{t=1}^{\infty} E(X_t)?$$

4.3 On dit $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge absolument (dans un mode de convergence) ssi $\Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t|$ converge (dans le même mode de convergence). Si $\Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t|$ converge avec probabilité (p.s.), on écrit $\Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t| < \infty$ p.s.

Critères généraux de convergence

4.4 $\Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t| < \infty$ p.s. $\Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s.

4.5 $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge absolument en probabilité $\Leftrightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge absolument p.s.

4.6 S'il existe une suite de constantes positives $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ telles que

1. $\Sigma_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t < \infty$,
2. $\Sigma_{t=1}^{\infty}\left(P|X_t| \geq \varepsilon_t\right) < \infty$,

alors $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s. (i.e. il existe une v.a. X telle que $\Sigma_{t=1}^{N} X_t \underset{N\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} X)$.

4.7 $\Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t| < \infty$ p.s. $\Leftrightarrow P\left(\Sigma_{t=1}^{n}|X_t| < x\right) \underset{n\to\infty}{\to} F(x), \forall x$, où $F(x)$ est la fonction de distribution d'une v.a.

4.8 $\Sigma_{t=1}^{\infty} E|X_t| < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t| < \infty$ p.s. et $E\left[\Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t|\right] = \Sigma_{t=1}^{\infty} E|X_t|$.

4.9 $\Sigma_{t=1}^{\infty}\left(E|X_t|^r\right)^{1/r} < \infty$, où $r \geq 1 \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t|$ et $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ convergent p.s. et en moyenne d'ordre r .

4.10 Si $X_t \in L_2$, $\mu_t \equiv E(X_t)$ et $\sigma_t^2 \equiv Var(X_t)$, $\forall t$, alors

$\Sigma_{t=1}^{\infty}\left[\sigma_t^2 + \mu_t^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t|$ et $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ convergent p.s. et en moyenne d'ordre 2 .

En particulier si $E(X_t) = 0$, $\forall t$,

$$\Sigma_{t=1}^{\infty}\sigma_t < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty}|X_t| \text{ et } \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t \text{ convergent p.s. et en moyenne d'ordre 2 .}$$

4.11 $\Sigma_{t=1}^{\infty} E|X_t| < \infty \Rightarrow E\left[\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t\right] = \Sigma_{t=1}^{\infty} E(X_t)$.

4.12 Si $X_t \in L_2$, $\forall t$, et s'il existe des constantes non négatives $\{\bar{\rho}_t : t = 1, 2, ...\}$ telles que $0 \leq \bar{\rho}_t \leq 1$,

$$E(X_s X_t) \leq \bar{\rho}_{t-s}\left[E\left(X_s^2\right) E\left(X_t^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \text{ pour } 0 < s \leq t ,$$

et

$$\Sigma_{t=1}^{\infty}\bar{\rho}_t < \infty ,$$

alors

$$\Sigma_{t=1}^{\infty}(\log\ t)^2 E\left(X_t^2\right) < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t \text{ converge p.s.}$$

Remarque : Lorsque $E(X_t) = 0$, on a

$$\text{Corr }(X_s, X_t) \leq \bar{\rho}_{t-s} .$$

Séries de variables orthogonales

4.13 Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s telles que $X_t \in L_2$, $E(X_t) = 0$ et $E(X_s X_t) = 0$ pour $s \neq t$. Alors

a) $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge en moyenne quadratique $\Leftrightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} E|X_t|^2 < \infty$;

b) $\Sigma_{t=1}^{\infty} E|X_t|^2 < \infty \Rightarrow E|X|^2 = \Sigma_{t=1}^{\infty} E|X_t|^2 < \infty$, où $\Sigma_{t=1}^{N} X_t \underset{N\to\infty}{\overset{2}{\to}} X$;

c) $\Sigma_{t=1}^{\infty} \frac{E|X_t|^2}{b_t^2} < \infty$ et $b_n \uparrow \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \Sigma_{t=1}^{n} X_t \overset{2}{\to} 0$; (Kolmogorov)

d) $\Sigma_{t=1}^{\infty} (\log\ t)^2 E|X_t|^2 < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s. et en moyenne quadratique;

e) $\Sigma_{t=1}^{\infty} \left(\frac{\log\ t}{b_t}\right)^2 E|X_t|^2 < \infty$ et $b_n \uparrow \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \Sigma_{t=1}^{n} X_t \overset{p.s.}{\to} 0$.

4.14 Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s telles que $X_t \in L_2$ et $Cov(X_s,\ X_t) = 0$ pour $s \neq t$, et soit $\mu_t = E(X_t)$. Alors

a) $\Sigma_{t=1}^{\infty} (X_t - \mu_t)$ converge en moyenne quadratique vers une v.a. Y
$\Sigma_{t=1}^{\infty}$ Var$(X_t) < \infty$;

b) $\Sigma_{t=1}^{\infty}$ Var$(X_t) < \infty \Rightarrow Var(Y) = \Sigma_{t=1}^{\infty}$ Var(X_t), où $\Sigma_{t=1}^{N} (X_t - \mu_t) \underset{N\to\infty}{\overset{2}{\to}} Y$;

c) $\Sigma_{t=1}^{\infty} \frac{Var(X_t)}{b_t^2} < \infty$ et $b_n \uparrow \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \Sigma_{t=1}^{n} (X_t - \mu_t) \overset{2}{\to} 0$;

d) $\Sigma_{t=1}^{\infty} (\log\ t)^2$ Var$(X_t) < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} (X_t - \mu_t)$ converge en moyenne quadratique et p.s. ;

e) $\Sigma_{t=1}^{\infty} \left(\frac{\log\ t}{b_t}\right)^2$ Var$(X_t) < \infty$ et $b_n \uparrow \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \Sigma_{t=1}^{n} (X_t - \mu_t) \overset{p.s.}{\to} 0$.

4.15 Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s telles que $X_t \in L_2$ et $E(X_s X_t) = 0$ pour $s \neq t$. Alors

a) $\Sigma_{t=1}^{\infty} E\left(X_t^2\right) < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge en m.q.;

b) $\Sigma_{t=1}^{\infty} (\log\ t)^2 E\left(X_t^2\right) < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s.

Séries de variables indépendantes

4.16 Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes telles que $X_t \in L_2$. Alors

a) $\Sigma_{t=1}^{\infty}$ Var$(X_t) < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} (X_t - EX_t)$ converge p.s. ;

b) si $|X_t| \leq c < \infty, \forall t$,

$$\Sigma_{t=1}^{\infty} (X_t - EX_t) \text{ converge p.s. } \Leftrightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} Var(X_t) < \infty \ ;$$

c) $\Sigma_{t=1}^{\infty} E(X_t)$ converge vers un nombre fini et $\Sigma_{t=1}^{\infty}$ Var$(X_t) < \infty \Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s. et en moyenne quadratique ;

d) $|X_t| \leq c < \infty$, $\forall t$, et $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s. $\Rightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ et $\Sigma_{t=1}^{\infty}$ Var(X_t) convergent.

4.17 (Théorème des trois séries de Kolmogorov). Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes et soit

$$\begin{aligned} X_t^c &= X_t\,, \text{ si } |X_t| < c \\ &= 0, \text{ si } |X_t| \geq c \end{aligned}$$

où $c > 0$. La série $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s. $\Leftrightarrow$ il existe une constante $c > 0$ telle que les trois séries suivantes convergent dans $\mathbb{R}$;

1. $\Sigma_{t=1}^{\infty} P\left[|X_t| \geq c\right]$;
2. $\Sigma_{t=1}^{\infty}$ Var (X_t^c) ;
3. $\Sigma_{t=1}^{\infty} E\left(X_t^c\right)$.

4.18 Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes. Si les deux séries $\Sigma_{t=1}^{\infty} E(X_t)$ et $\Sigma_{t=1}^{\infty} E\left(|X_t|^p\right)$ où $1 < p \leq 2$ convergent, alors la série $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s.
4.19 Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes. Alors

a) $\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge p.s. $\Leftrightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge en probabilité $\Leftrightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t$ converge en loi;

b) si $|X_t| \leq c < \infty$ et $E(X_t) = 0$, $\forall t$, alors

$$\Sigma_{t=1}^{\infty} X_t \text{ converge p.s. } \Leftrightarrow \Sigma_{t=1}^{\infty} X_t \text{ converge en moyenne quadratique.}$$

5 LOI DES GRANDS NOMBRES

5.1 Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s telles que $X_t \in L_2$ et $Cov(X_s, X_t) = 0$ pour $s \neq t$, et soit $\mu_t = E(X_t)$. Alors

a) $\Sigma_{t=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Var(X_n) < \infty \Rightarrow \bar{X}_n - \bar{\mu}_n \underset{n\to\infty}{\overset{2}{\to}} 0$ (loi de Chebychev)

où $\bar{X}_n = \Sigma_{t=1}^{n} X_t \;/\; n$ et $\bar{\mu}_n = \Sigma_{t=1}^{n} \mu_t \;/\; n$, et

b) $\Sigma_{t=1}^{\infty} \left(\frac{\log\, n}{n}\right)^2 Var(X_n) < \infty \Rightarrow \bar{X}_n - \bar{\mu}_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} 0$.

En particulier, si $Var(X_t) = \sigma^2 < \infty$ et $E(X_t) = \mu$ pour tout t, alors

$$\frac{1}{n}\Sigma_{t=1}^{n} X_t \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mu \text{ et } \frac{1}{n}\Sigma_{t=1}^{n} X_t \underset{n\to\infty}{\overset{2}{\to}} \mu\ .$$

5.2 Loi de Khintchine. Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes et identiquement distribuées dont la moyenne $E(X_t)$ existe. Alors

$$E(X_t) = \mu \Rightarrow \bar{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \mu\ .$$

5.3 Première loi forte de Kolmogorov. Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes telles que $E(X_t) = \mu_t$ et $Var(X_t) = \sigma_t^2$ existent pour tout t. Alors

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(\sigma_n/\ n)^2 < \infty \Rightarrow \bar{X}_n - \bar{\mu}_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} 0\ .$$

5.4 Seconde loi forte de Kolmogorov. Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes et identiquement distribuées. Alors

$$E(X_t) \text{ existe et est égal à } \mu \Leftrightarrow \bar{X}_n - \bar{\mu}_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} 0\ .$$

5.5 Loi des grands nombres pour des v.a.'s corrélées. Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s dont les moyennes $E(X_t) = \mu_t$ existent et satisfaisant la condition suivante :
(5.5.1) il existe une suite de nombres réels $\{r_j\}_{j=0}^{\infty}$ tels que

a) $0 \leq r_j \leq 1$, pour tout j ,

b) $Cov(X_s, X_t) \leq r_{t-s}[Var(X_s)Var(X_t)]^{1/2}$, pour $t \geq s$,

c) $\Sigma_{j=0}^{\infty} r_j < \infty$,

d) $\Sigma_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log\ n}{n}\right)^2 Var(X_n) < \infty$.

Alors

$$\bar{X}_n - \bar{\mu}_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} 0\ .$$

6 THÉORÈME CENTRAL LIMITE

6.1 Théorème de Lindeberg-Lévy. Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes et identiquement distribuées dans L_2 telles que $E(X_t) = \mu$ et $Var(X_t) = \sigma^2 > 0$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma_{t=1}^{n}(X_t - \mu)/\ \sigma = \sqrt{n}(\bar{X}_t - \mu)/\ \sigma \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} Z$$

où $Z \sim N(0,1)$.

6.2 Théorème de Lyapounov. Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes dans L_3 telles que $E(X_t) = \mu_t$, $Var(X_t) = \sigma_t^2 \neq 0$, $E[|X_t - \mu_t|^3] = \beta_t$ pour tout t. De plus, soit

$$B_n = \left(\Sigma_{t=1}^n \beta_t\right)^{1/3}, C_n = \left(\Sigma_{t=1}^n \sigma_t^2\right)^{1/2} .$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} (B_n/\ C_n) = 0$, alors

$$\Sigma_{t=1}^n (X_t - \mu_t)/\ C_n = \sqrt{n}(\bar{X}_t - \bar{\mu}_n)/(C_n/\sqrt{n})\sigma \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} Z$$

où $Z \sim N(0,1)$.

6.3 Théorème de Lindeberg-Feller. Soit $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ une suite de v.a.'s indépendantes dans L_2 telles que

$$P[X_t \leq x] = G_t(x)\ , E(X_t) = \mu_t, Var(X_t) = \sigma_t^2 \neq 0\ ,$$

pour tout t. Alors

$$\Sigma_{t=1}^n (X_t - \mu_t)/\ C_n \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} Z \text{ et } \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq t\leq n} (\sigma_t/\ C_n) = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{C_n^2} \Sigma_{t=1}^n \int_{|x-\mu_t|>\varepsilon C_n} (x - \mu_t)^2 dG_t(x) = 0, \forall \varepsilon > 0\ .$$

7 EXTENSION DES THÉORÈMES ASYMPTOTIQUES À DES VECTEURS

7.1 Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de vecteurs de dimension k,

$$X_n = (X_{1n}, X_{2n}, ..., X_{kn})', n = 1, 2, ...$$

dont les composantes sont des variables aléatoires réelles toutes définies sur un même espace de probabilité (Ω, Q, P), et

$$X = (X_1, X_2, ..., X_k)'$$

un autre vecteur aléatoire de dimension k dont les composantes sont définies sur le même espace.

a) On dit que X_n converge vers X en probabilité (de façon presque süre, en moyenne d'ordre r) si chaque composante de X_n converge vers la composante correspondante de X en probabilité (de façon presque süre, en moyenne d'ordre r). Suivant le cas, on écrit alors $X_n \overset{P}{\to} X$, $X_n \overset{p.s.}{\to} X$ ou $X_n \overset{r}{\to} X$.

b) On dit que X_n converge en loi vers $X(X_n \overset{L}{\to} X)$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \text{ à tous les points de continuité de } F_X(x)$$

où $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_k)' \in \mathbb{R}^k$,

$$F_{X_n}(x) = P[X_{1n} \leq x_1, ..., X_{kn} \leq x_k], n = 1, 2, ...$$

$$F_X(x) = P[X_1 \leq x_1, ..., X_k \leq x_k] \; .$$

7.2 Caractérisation univariée de la convergence en loi d'une suite de vecteurs. Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de vecteurs aléatoires de dimension $k \times 1$ et X un autre vecteur aléatoire de dimension $k \times 1$. Alors

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} X \Leftrightarrow \lambda' X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} \lambda' X \;,\; \forall \lambda \in \mathbb{R}^k \; .$$

En particulier si $X \sim N[\mu,\, \Sigma]$,

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} N[\mu, \Sigma] \Leftrightarrow \lambda' X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} N[\lambda' \mu, \lambda' \Sigma \lambda], \forall \lambda \in \mathbb{R}^k \; .$$

PREUVES ET RÉFÉRENCES

1.2 Lukacs (1975, théorème 2.2.6, p. 39).
2.6 Loève (1977, p. 153).
2.7 Lukacs (1975, p. 49).
2.8 Lukacs (1975, pp. 37 et 49).
2.11 Loève (1977, vol. I, p. 165).
2.12 Loève (1977, vol. I, p. 166).
2.13 Loève (1977, vol. I, p. 166).
2.14 Lukacs (1975, p. 38).
2.15 Loève (1977, vol. I, p. 240).
2.17 a) Loève (1977, vol. I, pp. 114, 118, 153) et Lukacs (1975, p. 48).
b) Loève (1977, vol. I, p. 153) et Lukacs (1975, p. 45).
c) Loève (1977, p. 163) et Lukacs (1975, p. 49).
2.18 Stout (1974, théorème 2.1.2, p. 11).
2.19 Loève (1977, vol. I, p. 175).
3.1 Loève (1977, vol. I, p. 184).
3.2 Loève (1977, vol. I, p. 185).
3.3 Loève (1977, vol. I, p. 186).
3.4 Rao (1973, p. 121).
3.5 Loève (1977, vol. I, p. 165) et Prakasa Rao (1987, p. 10).
3.8 Prakasa Rao (1987, p. 12).
3.9 Prakasa Rao (1975, pp. 43 et 57-58).
3.10 Rao (1973, p. 122) et Prakasa Rao (1987, p. 10).
3.11 Rao (1973, p. 124).
3.12 Lukacs (1975, p. 50).
4.5 Implication de la proposition 2.8.
4.6 Lukacs (1975, corollaire 4.2.2, p. 82).
4.7 Loève (1977, vol. I, p. 175, problème 10).
4.8 Loève (1977, vol. I, p. 175, problème 10), Lukacs (1975, théorème 4.2.1, p. 80) et le théorème de convergence monotone (Loève, 1977, vol. I, p. 125).
4.9 Loève (1977, vol. I, p. 175, problème 10 et proposition 2.13).
4.11 Loève (1973, p. 111). Ce résultat est une implication du théorème de convergence dominée; Loève (1977, vol. I, p. 126) et Royden (1968, pp. 88-89).
4.12 Stout (1974, corollaire 2.4.1, p. 28).
4.13 Loève (1977, vol. II, théorème 30.1, p. 122, et théorème 30.1B, p. 124).
4.15 a) Loève (1975, théorème 4.2.4A, p. 85) et Stout (1974, lamme 2.2.2, p. 15).
b) Stout (1974, théorème 2.3.2, p. 20).
4.16 a) Lukacs (1975, théorème 4.2.4, p. 84) et Loève (1977, vol. I, théorème 17.3.Ia, p. 248).

b)Loève (1977, vol. I, théorème 17.3.Ia, p. 248) et Lukacs (1975, théorème 4.2.4, corollaire 3, p. 87).

c) Lukacs (1975, théorème 4.2.4, corollaire 1, p. 84).

d) Loève (1977, théorème 17.3.Ib, p. 248).

4.18 Lukacs (1975, théorème 4.2.6, corollaire, p. 89).

4.19 a) Lukacs (1975, théorème 4.2.8, p. 92).

5.1 Le résultat se déduit en considérant le cas où $b_t = t$ dans 4.14 c) et d).

5.2 Rao (1973, section 2c.3, p. 112).

5.3 Rao (1973, section 2c.3, p. 114).

5.4 Rao (1973, section 2c.3, p. 115).

5.5 Gouriéroux et Monfort (1989, vol. 2, Rappel R.L., p. 550).

6.1 Rao (1973, section 2c.5, p. 127).

6.2 Rao (1973, section 2c.5, p. 127).

6.3 Rao (1973, section 2c.5, p. 128).

7.2 Rao (1973, section 2c.5, p. 128).

BIBLIOGRAPHIE

Gouriéroux, C. and A. Monfort (1989), Statistique et modèles économétriques, 2 volumes. *Economica*, Paris.

Loève, M. (1977), *Probability Theory I and II, 4th Edition*, Springer-Verlag, New York, sections 9, 10, 11, 16, 17.

Lukacs, E. (1975), *Stochastic Convergence, Second Edition*, Academic Press, New York, chapitres I, II, III, IV.

Prakasa Rao, B.L.S. (1987), *Asymptotic Theory of Statistical Inference*, Wiley, New York.

Rao, C.R. (1973), *Linear Statistical Inference and Its Applications, Second Edition*, Wiley, New York.

Royden, H.L. (1968), *Real Analysis, Second Edition*, MacMillan, New York.

Stout, W.F. (1974), *Almost Sure Convergence*, Academic Press, New York.

White, H. (1984), *Asymptotic Theory for Econometricians*, Academic Press, New York.